Sztuczna Inteligencja
Reprezentacja wiedzy II
Logika rozmyta i przybliżona

Włodzisław Duch

Katedra Informatyki Stosowanej UMK

Google: Wlodzislaw Duch

Strona wykładów

Niepewność i logiki nieklasyczne

Logika domniemań (default logic): nie zawsze prawdziwe wnioski.

Przestrzeń wierzeń (belief spaces), odróżnia punkty widzenia.

Informacja może być nieznana lub tylko prawdopodobna.

Logika wielowartościowa (Łukasiewicz, Tarski): określa kilka stopni prawdziwości stwierdzeń, np: *Wykształcony*(*x*) = [0, 0.3, 0.6, 1].

Logika rozmyta: nieskończenie wiele wartości/stopni.

Wnioskowanie statystyczne i metody probabilistyczne: określ prawd. $p(H_i\,|E)$ prawdziwości hipotezy H_i przy danej ewidencji E.

Jeśli da się to określić można użyć formuły Bayesa:

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)\,P(H_i)}{P(E)} = \frac{P(E|H_i)\,P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(E|H_k)\,P(H_k)}$$

Rodzaje niepewności

- Niepewność stochastyczna:
  Np. rzut kostką, wypadek, ryzyko ubezpieczenia
  - rachunek prawdopodobieństwa.

- Niepewność pomiarowa
  Około 3 cm; 20 punktów - statystyka.

- Niepewność informacyjna:
  Wiarygodny kredytobiorca, spełniający warunki
  - data mining, szukanie prawidłowości, skojarzeń.

- Niepewność lingwistyczna
  Np. mały, szybki, niska cena ...

Najwięcej praktycznych zastosowań w AI ma:

- Logika rozmyta (L. Zadeh 1965)

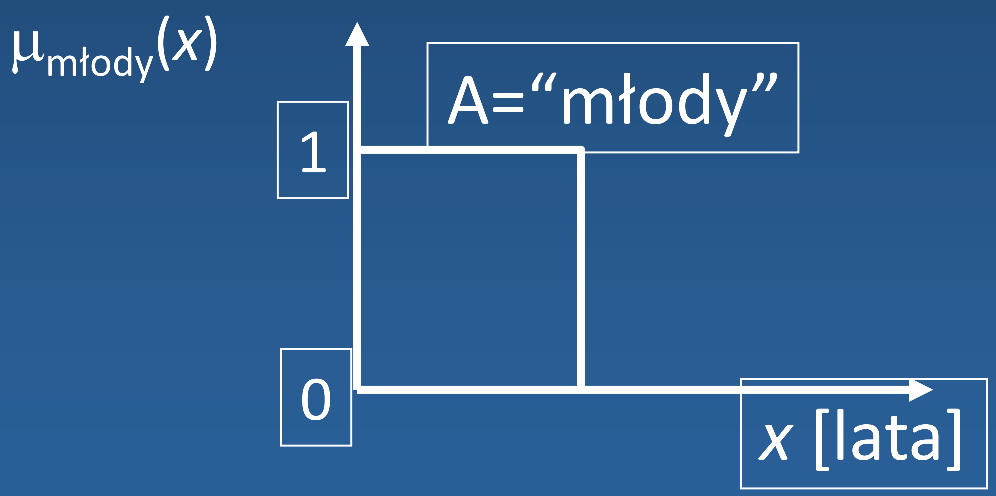
- Zbiory oraz logika przybliżona (Pawlak 1981).

Zbiory klasyczne

młody = $\{ x \in M \mid \text{wiek}(x) \le 20 \}$

Funkcja charakterystyczna

$$\mu_{\text{młody}}(x) = \begin{cases} 1 : \text{wiek}(x) \le 20 \\ 0 : \text{wiek}(x) > 20 \end{cases}$$



Zbiory rozmyte

X – uniwersum, zbiór uniwersalny, przestrzeń; $x \in X$

A – zmienna lingwistyczna, pojęcie, zbiór rozmyty.

Funkcja przynależności określa stopień, w jakim *x* należy do *A*.

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

Zmienne lingwistyczne: sumy zbiorów rozmytych, koncepcje, predykaty logiczne o ciągłych wartościach.

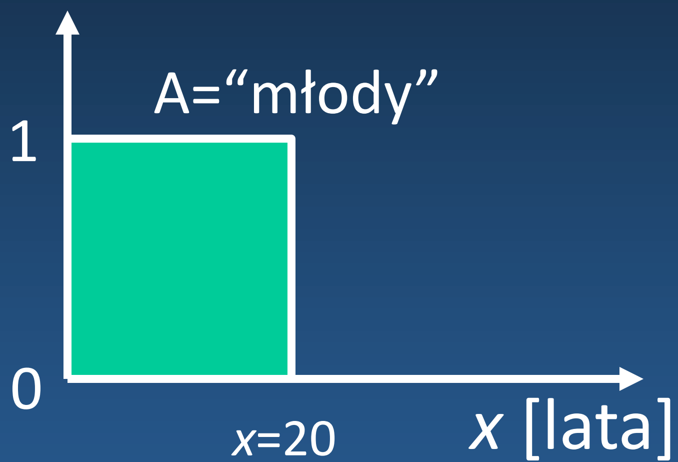
Stopień przynależności należy do przedziału [0,1] ale to nie jest prawdopodobieństwo; np. łysy w 80% to nie to samo co łysy 4 na 5 razy.

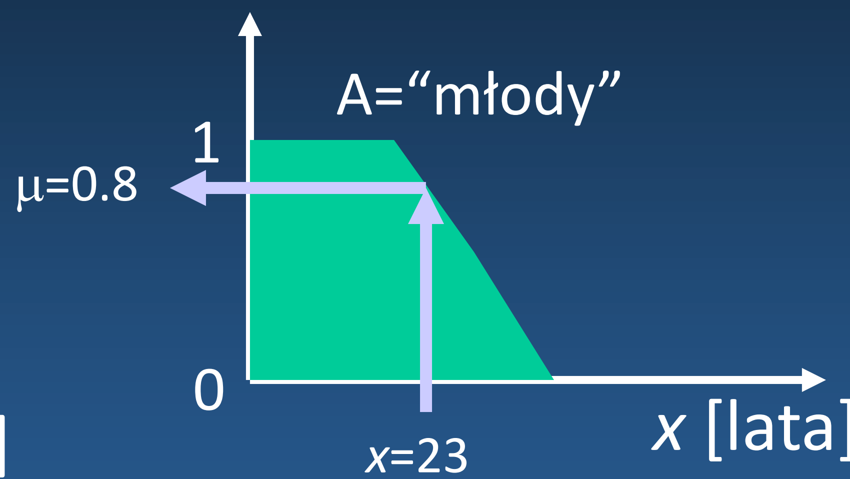
Prawdopodobieństwo jest unormowane do jedynki, funkcja przynależności zwykle nie, można należeć do wielu zbiorów w różnym stopniu.

Rozmyte pojęcia są subiektywne i zależne od kontekstu.

Przykłady

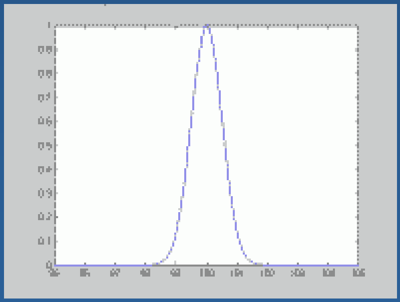
Klasyczne i rozmyte pojęcie „młody człowiek”





„Temperatura wrzenia” ma wartość około 100 stopni (pogoda, ciśnienie, skład chemiczny).

$$\mu_W\left(T\right)=e^{-2\left(T-100\right)^2}$$



Definicje

Support (baza) zbioru rozmytego A:

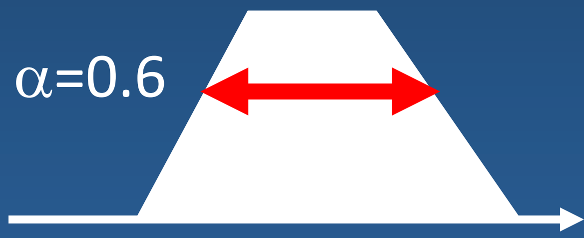
$\text{supp}(A) = \{ x \in X : \mu_A(x) > 0 \}$

Core (jądro) zbioru rozmytego A:

$\text{core}(A) = \{ x \in X : \mu_A(x) = 1 \}$

α-cut (α-cięcie) zbioru rozmytego A:

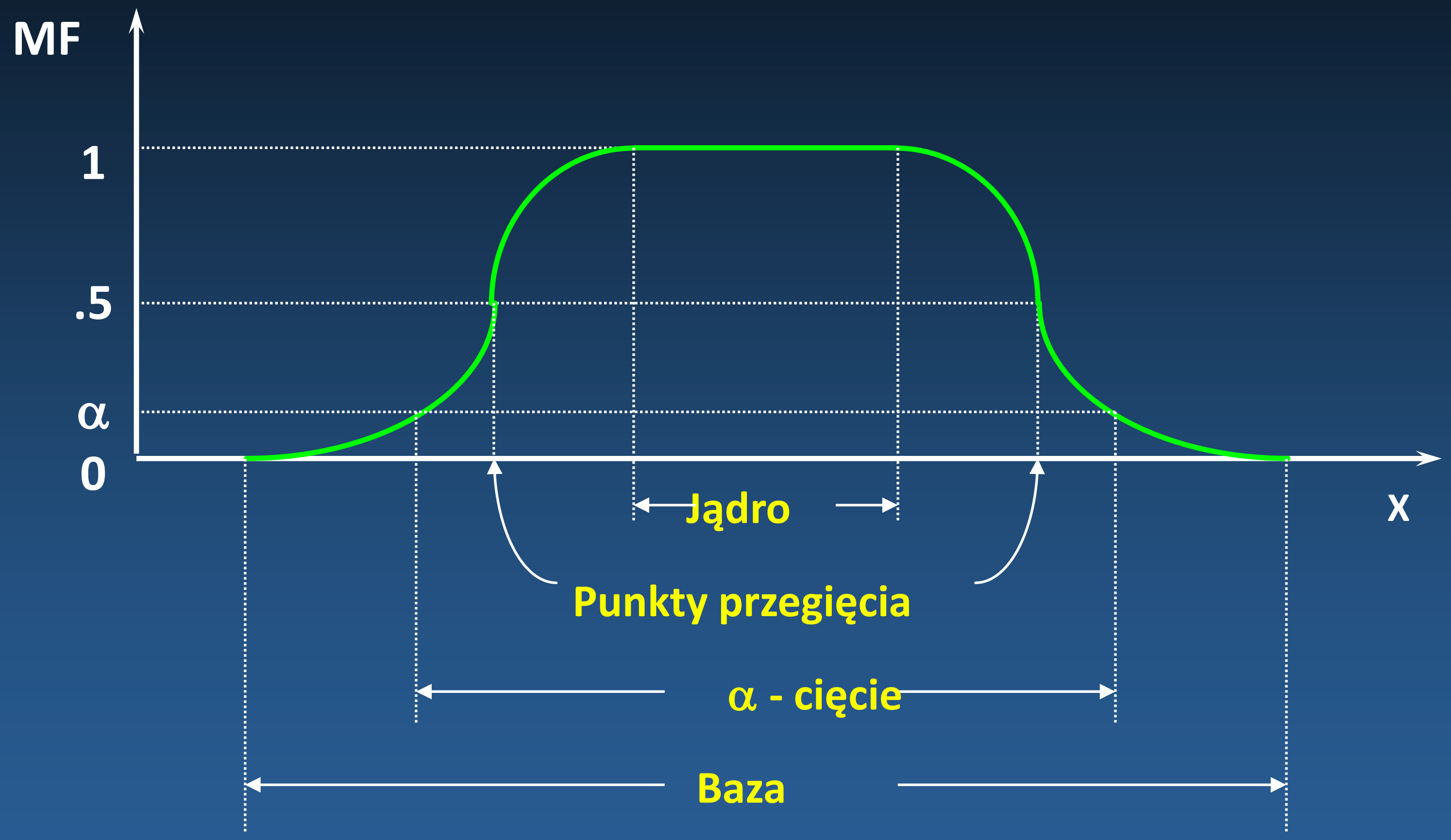
$A_\alpha = \{ x \in X : \mu_A(x) > \alpha \}$



Wysokość = $\max_x \mu_A(x) \leq 1$

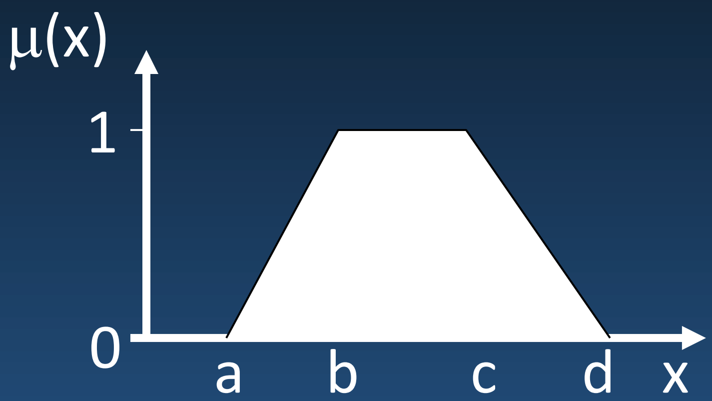
Zbiór rozmyty normalny: $\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1$

Terminologia

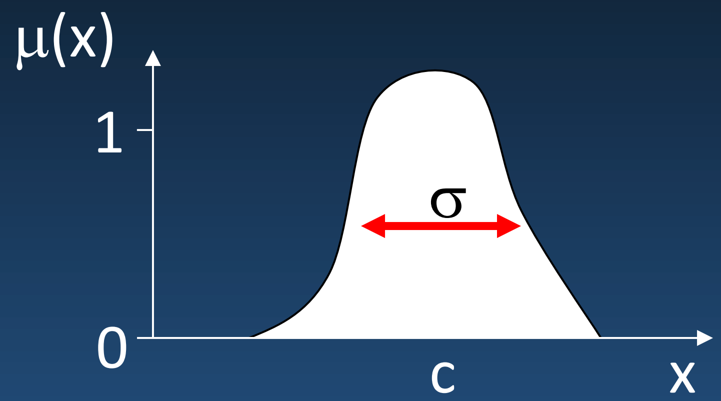


Typy Funkcji Przynależności

Trapezoid: <a,b,c,d>



Gaus/Bell: N(m,s)



$$Trap\left(x;a,b,c,d\right)=\max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{d-x}{d-c},1\right),0\right)$$

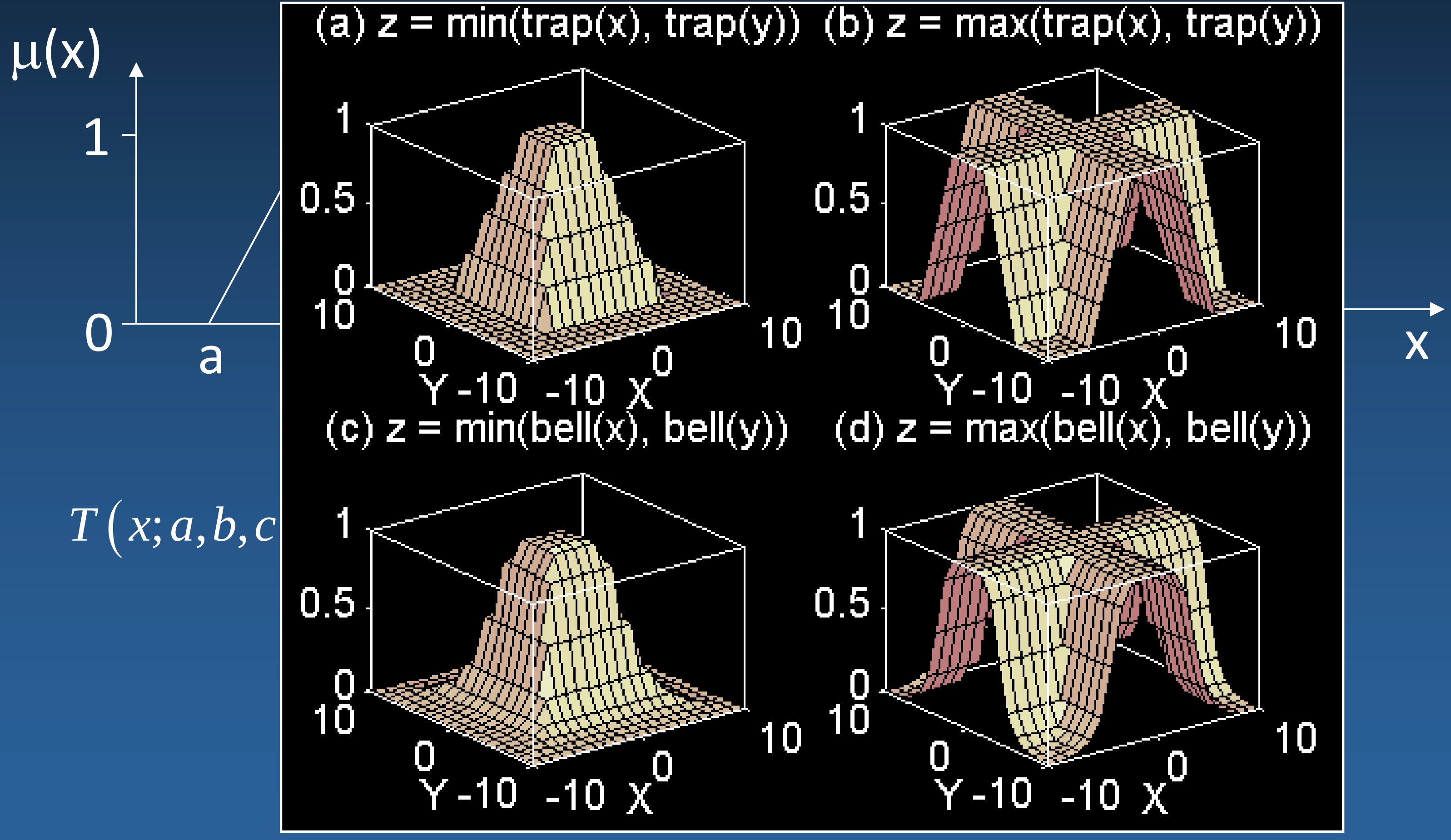
$$G\left(x;a\right)=e^{-\left(x-a\right)^2/2\sigma^2}$$

$$B\left(x;a,b\right)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-a}{b}\right|^{2b}}$$

Funkcje Przynależności

Trójkątna: <a,b,c>

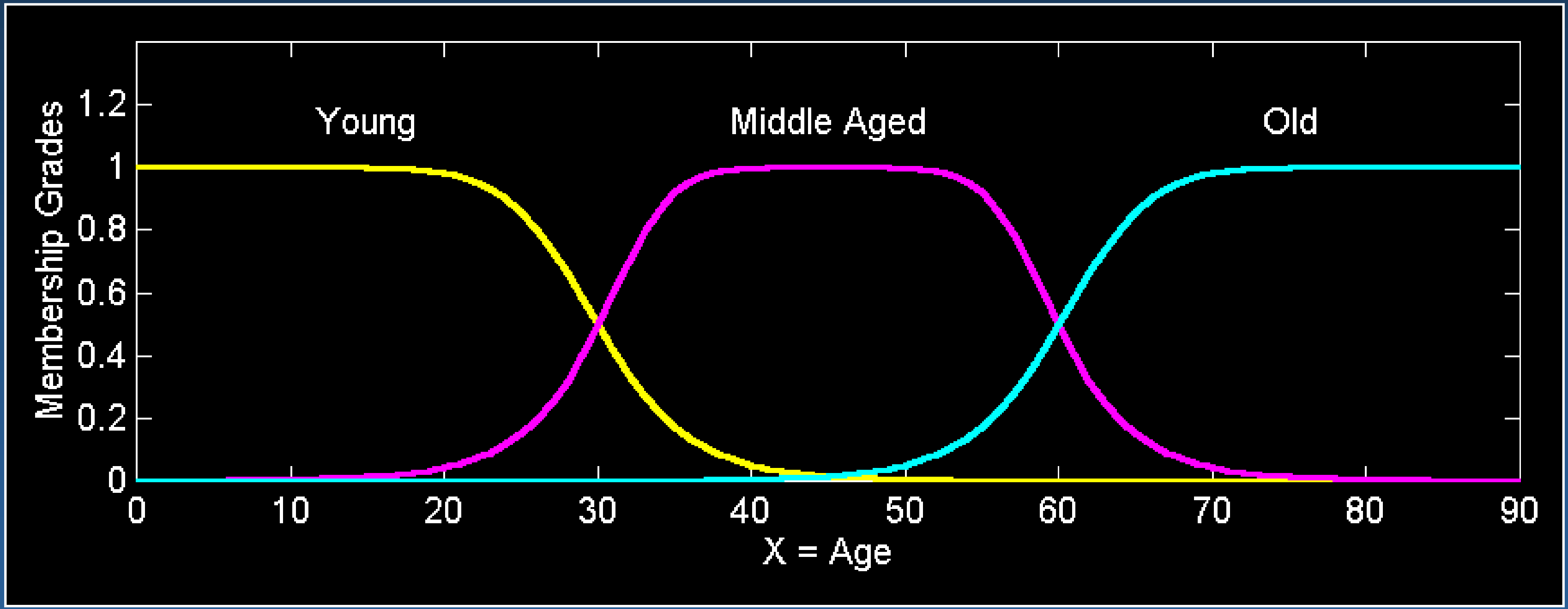
Singleton: (a,1) i (b,0.5)



$T(x;a,b,c$

Zmienne lingwistyczne

W=20 => Wiek=młody.
Zmienna lingwistyczna = wartość lingwistyczna.
Zmienna lingwistyczna: : temperatura
termy (zbiory rozmyte) : { zimno, ciepło, gorąco}



Liczby rozmyte

Zwykle wypukłe, unimodalne (jedno maksimum).

FP często się nakrywają.

Liczby: jądro = punkt, $\exists_x\ \mu(x)=1$

Monotonicznie maleją po obu stronach jądra.

Typowy wybór: trójkątne funkcje (a,b,c) lub singletony.

$$7_F = \left\{ \frac{1/3}{5} + \frac{2/3}{6} + \frac{1}{7} + \frac{2/3}{8} + \frac{1/3}{9} \right\}$$

$$A = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i)/x_i$$

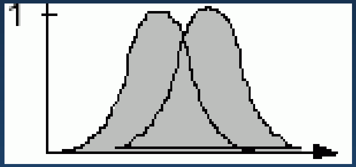
$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

Suma i iloczyn zbiorów

A, B - zbiory rozmyte.

Suma A∪B to zbiór o funkcji przynależności:

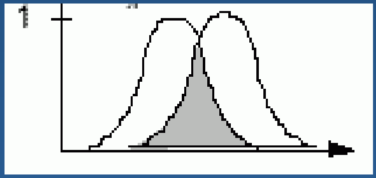
$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$$



max można zastąpić S-normą $S(a,b)$, niemalejącą dla obu argumentów, przemienną, łączną i $S(a,0)=a$, $S(a,1)=1$.

Iloczyn A∩B to zbiór o funkcji przynależności:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$$



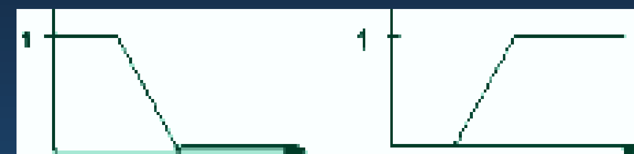
min można zastąpić dowolną T-normą $T(a,b)$, nierosnącą dla obu argumentów, przemienną, łączną i $T(a,0)=0$, $T(a,1)=a$.

Dopełnienie i podzbiór

Dopełnienie *A′* zbioru *A* to zbiór o funkcji przynależności:

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

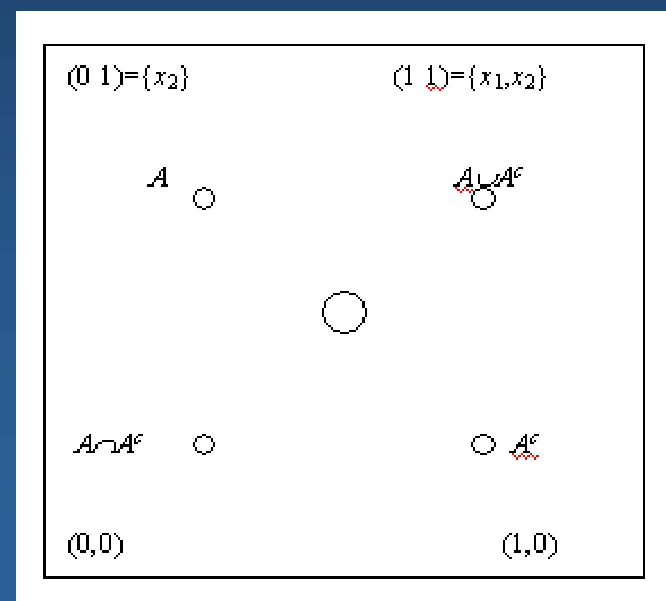
$$\mu_{A' \cup A}(x) \leq 1; \quad \mu_{A' \cap A}(x) \leq 1$$



$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B$$

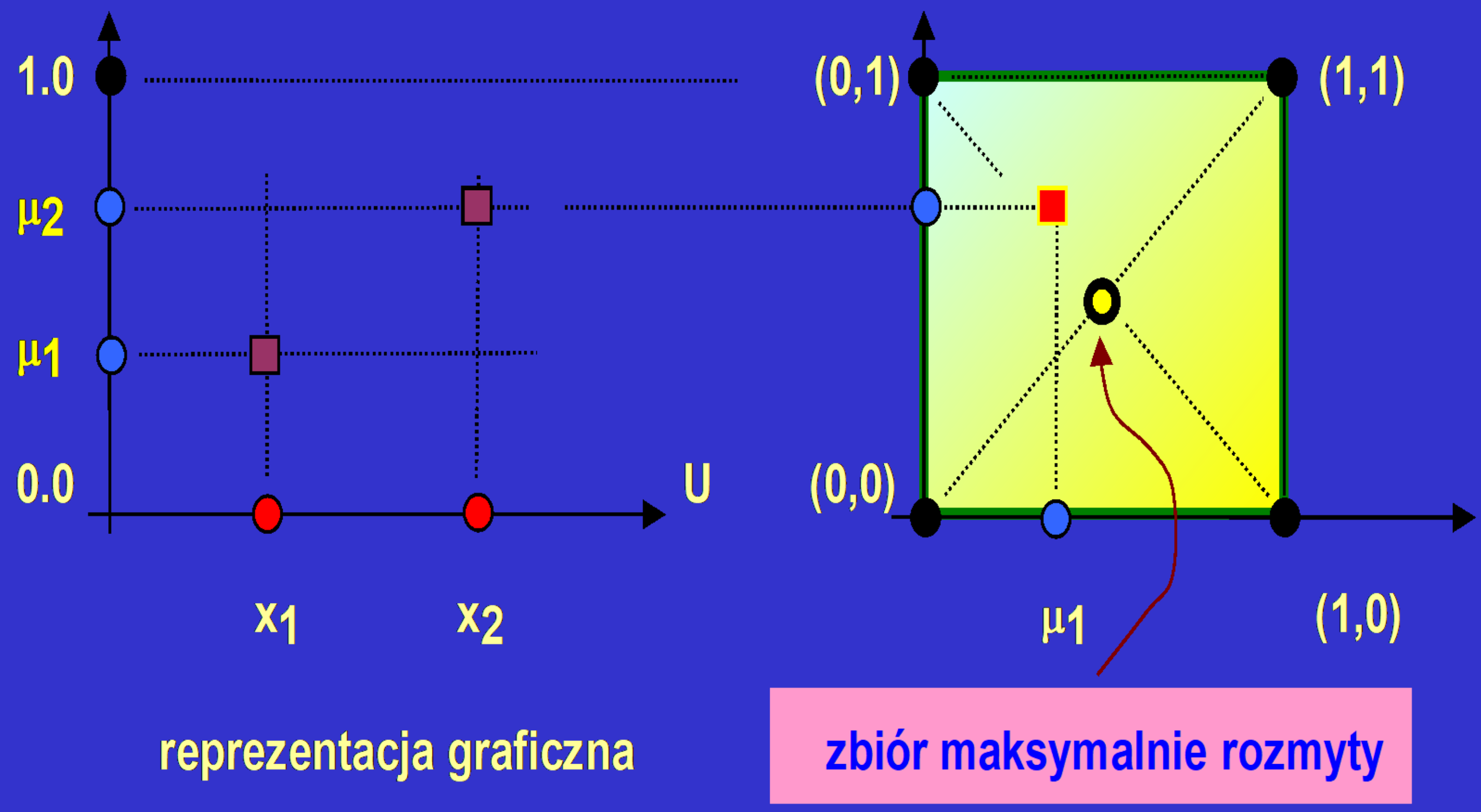
Zbiór rozmytych zbiorów, 2-elementowy:
zbiory klasyczne są w rogach;
w środku jest zbiór najbardziej rozmyty:

$$A = A \cap A' = A \cup A' = A'$$



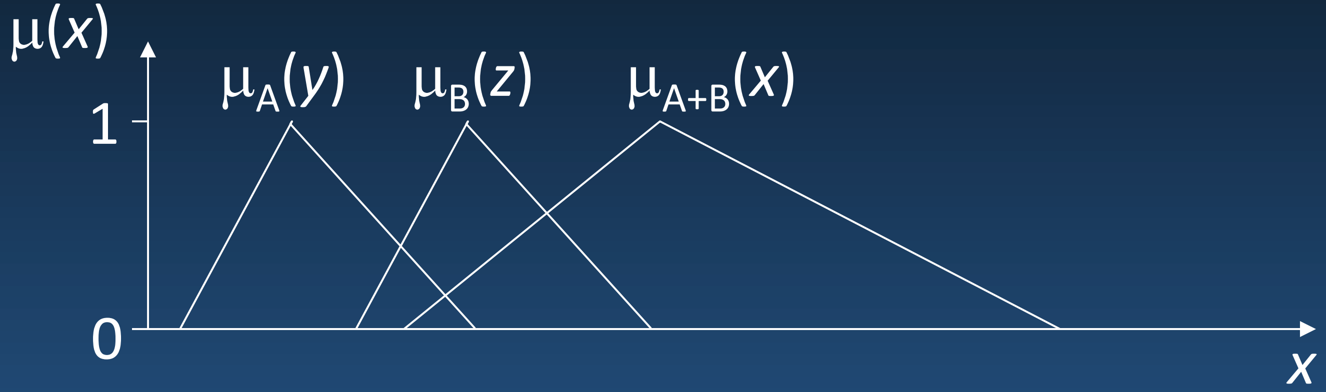
Dopełnienie i podzbiór

Dopełnienie *A′* zbioru *A* to zbiór o funkcji przynależności:

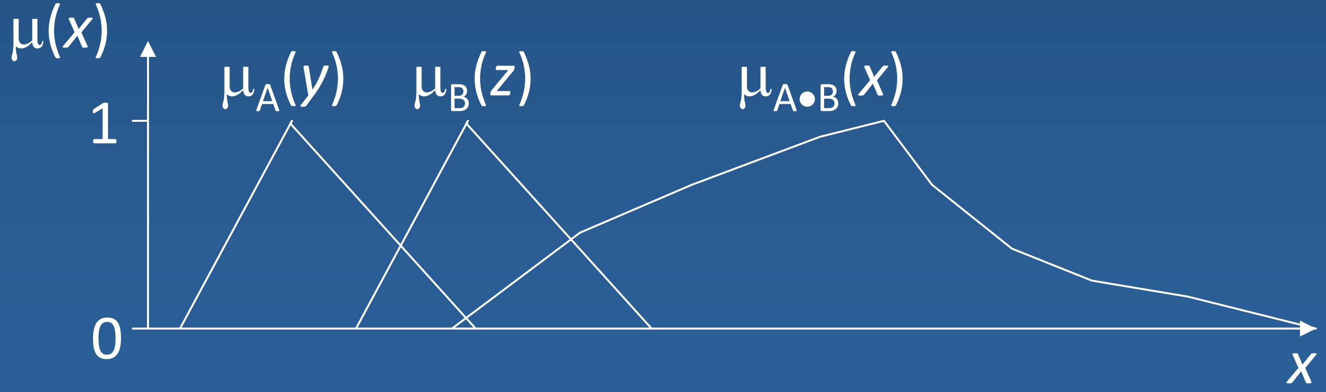


Operacje na liczbach rozmytych

Dodawanie: $\mu_{A+B}(x) = \max\{\mu_A(y), \mu_B(z) \mid x = y+z\}$



Iloczyn: $\mu_{A\bullet B}(x) = \min\{\mu_A(y), \mu_B(z) \mid x = y\bullet z\}$

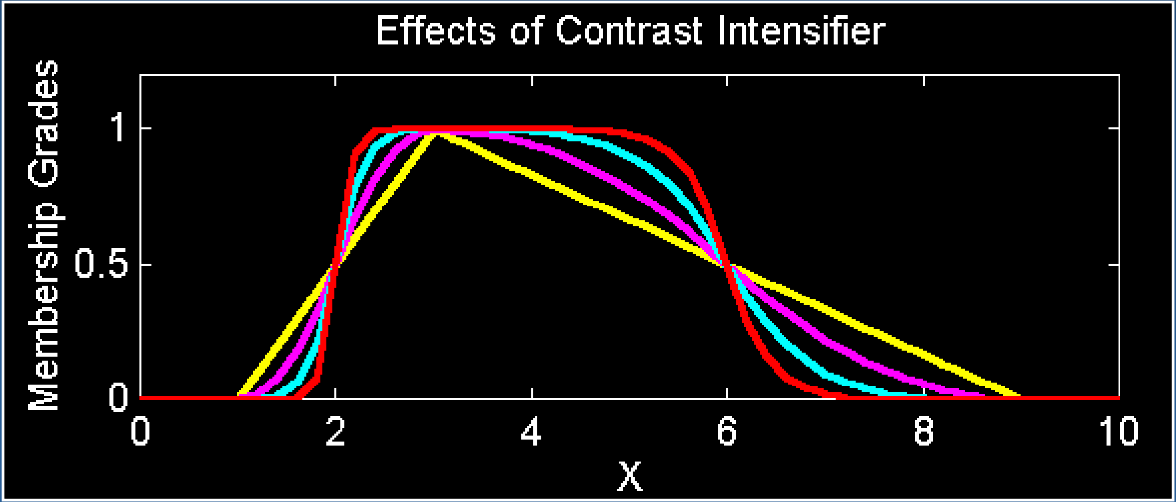


Operacje na zm. lingwistycznych

Koncentracja: Con(A) = A^2
Spłaszczenie:
Dil(A) = $A^{0.5}$

Intensyfikacja kontrastu:

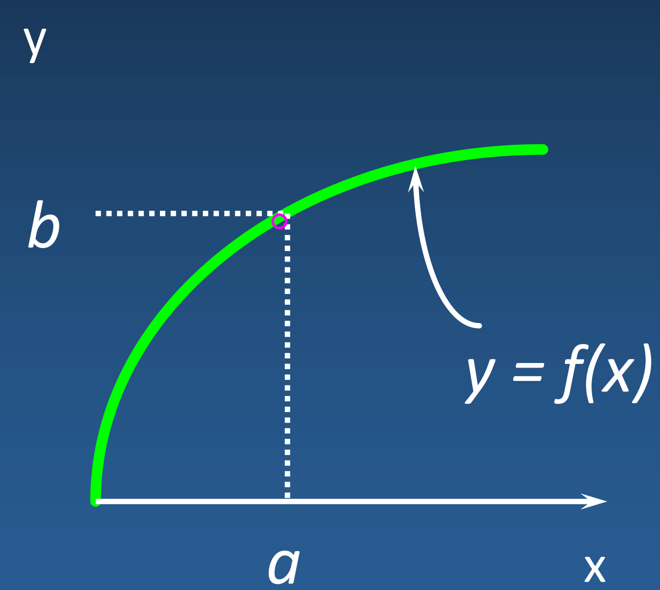
$$INT(A) = \begin{cases} 2A^2, & 0 \le \mu_A(x) \le 0.5 \\ \neg 2(\neg A)^2, & 0.5 \le \mu_A(x) \le 1 \end{cases}$$

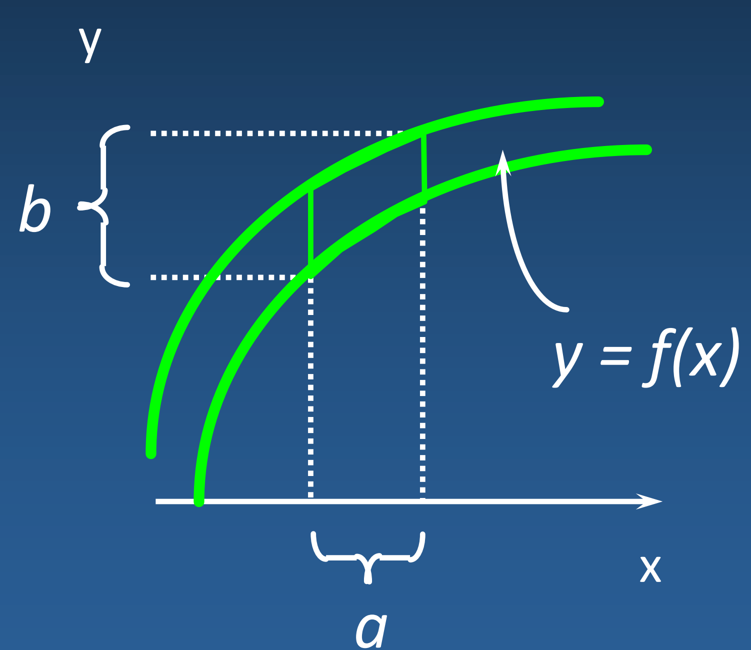


Funkcje rozmyte

Jeśli *y=f*(*x*), i *x=a* to *y=b*.

Dla punktów - krzywa dla interwałów - pasmo.





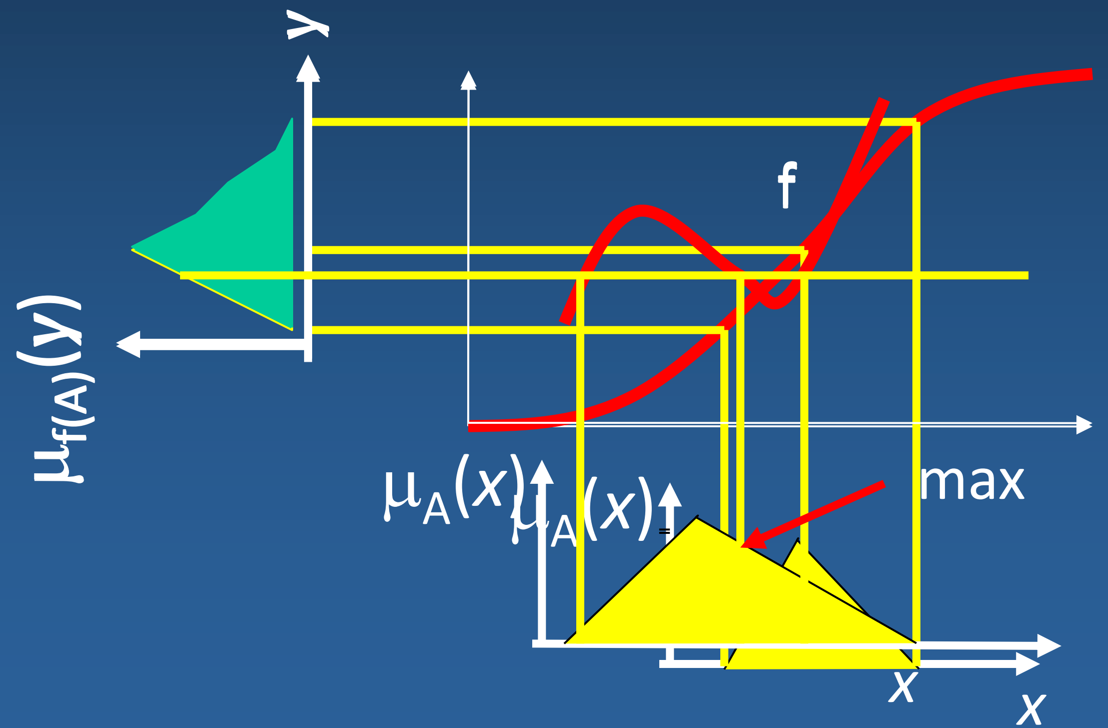
Dla rozmytych zmiennych *x* ?

Rozmyte funkcje

Mamy zbiór rozmyty A i funkcję f :
Jak wygląda f(A)?

Dla dowolnej funkcji f:

$$\mu_{f(A)}(y) = \max\{\mu_A(x) \mid y=f(x)\}$$



Rozmyte relacje

- Relacje klasyczne

$R \subset X \times Y$ def: $\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{iff } (x,y) \in R \\ 0 & \text{iff } (x,y) \in R \end{cases}$

- Relacje rozmyte

$R \subset X \times Y$ def: $\mu_R(x,y) \in [0,1]$

$\mu_R(x,y)$ opisuje stopień powiązania *x* i *y*

Inna interpretacja: stopień prawdziwości zdania *x* R *y*

Przykłady rozmytych relacji

Bliskie: X ≈Y; X zależy od Y; X podobne do Y ...

X = { deszczowo, pochmurnie, słonecznie }

Y = { opalanie, wrotki, kamping, lektura }

X/Y	opalanie	wrotki	kamping	lektura
deszczowo	0.0	0.2	0.0	1.0
pochmurnie	0.0	0.8	0.3	0.3
słonecznie	1.0	0.2	0.7	0.0

Relacje rozmyte związane są z korelacjami.

Reguły rozmyte

Wiedzę potoczną można często zapisać w naturalny sposób za pomocą reguł rozmytych.

Jeśli zm. lingw-1 = term-1 i zm. lingw-2 = term-2
to zm. lingw-3 = term-3

Jeśli Temperatura = zimno i cena ogrzewania = niska
to grzanie = mocno

Sformułowanie reguły rozmytej wymaga najpierw określenia zmiennych lingwistycznych, czyli zdefiniowania funkcji przynależności.

Co oznacza reguła rozmyta:
Jeśli *x* jest A to *y* jest B ?

- Implikacja A =>B, czyli (not A or B), zakładamy związek przyczynowy.
- Korelacja A i B.
  Uwaga na interpretację: korelacja to nie implikacja!

Przykłady dziwnych korelacji.

Zastosowania logiki rozmytej

Wszędzie tam, gdzie trudno jest utworzyć matematyczny model ale daje się opisać sytuację w sposób jakościowy, za pomocą reguł rozmytych.

Kontrolery rozmyte:
jeśli się przewraca to popchnąć, reguły rozmyte dobierają siłę.

Wiele zastosowań przemysłowych, głównie dotyczących kontroli procesów, tworzenie przybliżonych modeli.

Zastosowania techniczne:
inteligentne lodówki, pralki, windy, opiekacze do grzanek, aparaty fotograficzne, odkurzacze i inne sprzęty.

Zastosowania medyczne:
nieprecyzyjny język daje się przełożyć na reguły rozmyte.

Logika przybliżona

Logika przybliżona

Rough logics, Z. Pawlak (Pol. Warszawska), 1982.

Obiekt $o \in Ob$.

Atrybut $a \in AT$,

$f(o,a)$ wartości atrybutów.

Relacja równoważności:

$$\forall_{a \in A}\ o_1 R(a)\, o_2 \Leftrightarrow f(o_1,a)=f(o_2,a)$$

Klasy równoważności: $\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n\} = R(A)^*$.

(Ob,R) - przestrzeń koncepcji.

Zbiory przybliżone

$O \subset Ob$ aproksymacja przez sumę klas:

przybliżenie dolne (obszar pozytywnym)

$$Lower(O)=Pos(O)=\bigcup_{e_i \subseteq O} e_i$$

przybliżenie górne (obszar negatywny)

$$Upper(O)=\bigcup_{e_i \cap O \neq \emptyset} e_i \,; \quad Neg(O)=Ob\text{-}Pos(O)$$

Granica (boundary)

$$Bnd(O)=Upper(O)\text{-}Lower(O)$$

Zbiory przybliżone cd.

Zbiór przybliżony ma granicę niepustą.

- Redukt – zbiór atrybutów *A* wystarczający by utworzyć partycję *R*(*A*)* która dokładnie definiuje *O*.

- Jądro (*core*) – iloczyn reduktów.

Można określić stopień przynależności *x* do zbioru *O*,

I(*x*) – liczba elementów równoważnych *x*.

$$\mu_O^I(x) = |O \cap I(x)| / |I(x)|$$

Przykład

Pacjent	Ból głowy	Ból mięśni	Temperatura	Grypa
1. Jaś	nie	tak	wysoka	tak
2. Małgosia	tak	nie	wysoka	tak
3. Piotr	tak	tak	b. wysoka	tak
4. Paweł	nie	tak	normalna	nie
5. Karol	tak	nie	wysoka	nie
6. Kaśka	nie	tak	b. wysoka	tak

Przykład cd.

Małgosia i Karol: takie same symptomy, tylko jedno ma grypę.

Zbiór atrybutów: $A = AT = \{BG, BM, T\}$

$R(A)^*$ = {{Karol, Małgosia}, {Jaś}, {Piotr}, {Paweł}, {Kasia}}

Pozytywne przykłady z grypą:

O = {Jaś, Małgosia, Piotr, Kasia}

Negatywne przykłady z grypą: *O* = {Paweł, Karol}

Ograniczenie dolne: *Pos*(*O*) = *Lower*(*O*) = {Jaś, Piotr, Kasia}

Obszar negatywny: *Neg*(*O*) = {Paweł}

Granica: *Bnd*(*O*) = {Karol, Małgosia}

Aproksymacja górna:

Upper(*O*) = *Pos*(*O*) + *Bnd*(*O*) = {Jaś, Małgosia, Piotr, Karol, Kasia}

Przykład cd.

- Dokładność koncepcji „ma grypę”:

$|Lower(O)|/|Upper(O)| = 3/5$

- Dokładność koncepcji „nie ma grypy”

$$|Neg(O)|/|Lower(O)| = 1/3.$$

$P(x)$ „ma grypę” = 1, ½, 1, 0, ½, 1.

Redukt – usuń atrybut, sprawdź aproksymacje górne i dolne.
Jeśli nic się nie zmieni usuwaj dalej (ale to zachłanne podejście, nie gwarantuje znalezienia minimalnych reduktów).
Zbędne zmienne: ból mięśni lub temperatura.

Przykład cd.

Reguły przynależności do klasy „ma grypę”:

IF (ból głowy =F i temperatura = wysoka) THEN grypa =T

IF (ból głowy =T i temperatura = wysoka) THEN grypa =T

IF (ból głowy =T i temperatura = b. wys.) THEN grypa =T

IF (ból głowy =F i temperatura = norma) THEN grypa =F

IF (ból głowy =T i temperatura = wysoka) THEN grypa =F

IF (ból głowy =F i temperatura = b. wys.) THEN grypa =T

Dla zmiennych ciągłych zastosowanie logiki przybliżonej wymaga dyskretyzacji zmiennych.

Logika ciągła

(R. Poli, M. Ryan, A. Sloman 1995):

Wartości zmiennych logicznych [0,1]

Funkcje logiczne można zastąpić wyrażeniami arytmetycznymi:

$$o(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)$$

$$a(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$$

$$n(x_1) = \neg x_1 = 1 - x_1$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2 = 1 - x_1(1 - x_2)$$

Wyrażenia logiczne = wielomiany.

Szukanie => minimalizacja.

Na razie mało rozpowszechniona.

Teoria wiarygodności.

(Dempster - Schaefer 1968):

Wiarygodność $\in$ [0,1] czyli ocena pewności wiedzy.

Ewidencja (napływająca wiedza) zawęża wiarygodność do pojedynczej liczby, przechodząc w rozważania probabilistyczne.

Początek przedziału $Bel(s)$, dla postulatu s

koniec przedziału, $Pl(s)=1-Bel(\neg s)$.

Teoria prawdopodobieństwa (Bayes):

trzy równie prawdopodobne hipotezy H=A, B, C, to $p(\mathrm{H})=1/3$

Dempster-Shafer: wiarygodność $w(\mathrm{H}) \in [0,1]$.

Podsumowanie

- Metody logiczne – potężne narzędzie, wiele teorii zarówno na poziomie logiki klasycznej jak i teorii uwzględniającej niepewność.
- Myślenie nie jest procesem uniwersalnym, oparte jest na schematach zależnych od dziedziny wiedzy.
- Reprezentacja logiczna odwołuje się do symboli, umiejętności nie można się nauczyć w ten sposób.
- Gra w ping-ponga, cofanie ciężarówki, to działania sensomotoryczne, wymagające ciągłych odwzorowań obserwacji na działania.
- Matematyka daje ogólniejszy język niż sama logika, pozwalając opisywać procesy ciągłe.
- Modelowanie procesów ciągłych jest do pewnego stopnia możliwe za pomocą logiki rozmytej, dokładniejsze za pomocą sieci neuronowych.
- Logicy i filozofowie mają tendencję sprowadzania wszystkiego do logiki klasycznej, ale ciekawszych zastosowań w życiu codziennym brakuje.

Przykładowe pytania

- Jakie mamy rodzaje wiedzy w rosnącej trudności ich reprezentacji?
- Na czym polega reprezentacja wiedzy w przestrzeni stanów? Czym się różni reprezentacja proceduralna?
- Co to jest logika predykatów i do czego służy?
- Zapisz w reprezentacji logicznej fakt: Ania studiuje prawo i jest na 3 roku.
- Co to jest logika pierwszego rzędu? Jakie ma własności?
- Na czym polega metoda rezolucji i po co się ją stosuje?
- Jakie są wady i zalety reprezentacji logicznej?
- Jakie mamy rodzaje niepewności i jakie teorie się tym zajmują?
- Co to jest zbiór rozmyty? Przybliżony?
- Podać przykład zmiennych i wartości lingwistycznych.
- Zdefiniować dopełnienie, sumę, iloczyn dla zbiorów rozmytych.
- Podać przykład reguł rozmytych.
- Zapisać jakieś fakty używając logiki rozmytej.